JEAN-LOUIS BASDEVANT

Introduction à la physique quantique

2e édition

LICENCE 2 & 3 PHYSIQUE
ÉCOLES D'INGÉNIEURS

- Cours complet
- Plus de 100 exercices et problèmes
- Tous les corrigés détaillés

deboeck SUPÉRIEUR

Introduction à la physique quantique

Extrait du catalogue

Physique

Aslangul C., *Mécanique quantique. 1. Fondements et premières applications.* 2e éd.
Aslangul C., *Mécanique quantique. 2. Développements et applications à basse énergie.* 3e éd.
Aslangul C., *Mécanique quantique. 3. Corrigés détaillés et commentés des exercices et problèmes.* 2e éd.
Basdevant J.-L., *La physique quantique et ses applications*
Basdevant J.-L., *12 leçons de mécanique quantique*
Basdevant J.-L., *Les principes variationnels en physique.* 3e éd.
Bécherrawy T., Optique géométrique
Biemont É., *Spectroscopie atomique. Instrumentation et structures atomiques*
Biemont É., *Spectroscopie moléculaire. Structures moléculaires et analyse spectrale*
Cérruti C., *Physique. Les fondamentaux en Licence 1*
Champeau R.-J., Carpentier R., Lorgeré I., *Ondes lumineuses. Propagation, optique de Fourier, cohérence*
Fruchart M., Lidon P., Thibierge E., Champion M., Le Diffon A., *Physique expérimentale. Optique, mécanique des fluides, ondes et thermodynamique*
Galtier S., *Magnétohydrodynamique. Des plasmas de laboratoire à l'astrophysique*
Godet-Lartigaud J.-L., *Introduction à la thermodynamique*
Krivine H., Treiner J., *Exercices et problèmes de physique statistique*
Langlois D., *Introduction à la relativité. Principes fondamentaux et conséquences physiques*
Langlois D., *Relativité générale. Concepts élémentaires et applications astrophysiques*
Mayet F., *Physique nucléaire appliquée.* 2e éd.
Rax J.-M., *Électromagnétisme. Milieux, structures, énergie*
Rieutord M., *Une introduction à la dynamique des fluides*
Sator N., Pavloff N., *Physique statistique*
Taillet R., *Optique physique. Propagation de la lumière.* 2e éd.
Watzky A., *Thermodynamique macroscopique*

Chimie

Bellec C., *Chimie organique.* 2e éd.
Cachau-Herreillat D., *Des expériences de la famille Acide-Base.* 3e éd.
Cachau-Herreillat D., *Des expériences de la famille Réd-Ox.* 2e éd.
Chaquin P., Volatron F., *Chimie organique : une approche orbitalaire*
Depovere P., *Chimie générale.* 3e éd.
Depovere P., *Chimie organique.* 2e éd.
Girard F., Girard J., *Chimie inorganique et générale : des expériences pour mieux comprendre !*
Kiel M., *L'oxydoréduction. Du nombre d'oxydation aux diagrammes de Pourbaix*
Martinand-Lurin E., Grüber R., *40 expériences illustrées de chimie générale et organique. La chimie, une science expérimentale*
Moussard C., *Biochimie structurale et métabolique.* 3e éd.
Moussard C., *Biologie moléculaire et Biochimie des communications cellulaires*
Rabasso N., *Chimie organique. Généralités, études des grandes fonctions et méthodes spectroscopiques.* 2e éd.
Rabasso N., *Chimie organique. Hétéroéléments, stratégies de synthèse et chimie organométallique.* 2e éd.

JEAN-LOUIS BASDEVANT

Introduction à la physique quantique

2e édition

deboeck SUPÉRIEUR

Du même auteur

Basdevant J.-L., *La physique quantique et ses applications*
Basdevant J.-L., *12 leçons de mécanique quantique*
Basdevant J.-L., *Les principes variationnels en physique*. 3e éd.

Pour toute information sur notre fonds et les nouveautés dans votre domaine de spécialisation, consultez notre site web :

www.deboecksuperieur.com

Image de couverture : © Nasa Goddard Space Flight Center
Maquette intérieure : Sébastien Mengin/Edilibre
Mise en page intérieure de l'auteur
Maquette et mise en pages de la couverture : Primo&Primo

Dépôt légal :
Bibliothèque royale de Belgique : 2017/13647/100
Bibliothèque nationale, Paris : juin 2017
ISBN : 978-2-8073-1442-9

Tous droits réservés pour tous pays.
Il est interdit, sauf accord préalable et écrit de l'éditeur, de reproduire (notamment par photocopie) partiellement ou totalement le présent ouvrage, de le stocker dans une banque de données ou de le communiquer au public, sous quelque forme ou de quelque manière que ce soit.

© De Boeck Supérieur SA, 2017 - Rue du Bosquet 7, B1348 Louvain-la-Neuve
De Boeck Supérieur - 5 allée de la 2e DB, 75015 Paris

Sommaire

Avant-propos ..... **XV**
1 Un phénomène quantique **1**
2 Fonction d'onde, équation de Schrödinger **23**
3 Les grandeurs physiques **43**
4 Systèmes simples **65**
5 Formalisme de Dirac **95**
6 Double puits de potentiel, système à deux états **119**
7 Méthodes d'approximation **161**
8 Algèbre des observables **175**
9 Le moment cinétique **211**
10 Atome d'hydrogène **241**
11 Le spin 1/2 ..... **261**
12 Particules identiques, principe de Pauli **295**
13 L'intrication quantique, chemin des paradoxes **333**
14 Corrigés des exercices **361**
Index **377**

Table des matières

Avant propos **XV**

1 Un phénomène quantique **1**
1.1 La mécanique quantique 1
1.1.1 Planck, Einstein et le photon 2
1.1.2 La spectroscopie atomique 3
1.1.3 E=hν 4
1.2 Comportement ondulatoire des particules 4
1.2.1 Comportement ondulatoire de la matière 5
1.2.2 Preuve expérimentale 7
1.2.3 Analyse du phénomène 8
1.3 Nature probabiliste du phénomène 9
1.3.1 Comportement aléatoire des particules 9
1.3.2 Un phénomène probabiliste non classique 10
1.4 Conclusions 11
1.5 Description phénoménologique 12
1.6 Notions sur les probabilités 14
1.7 Table de valeurs numériques 21
1.8 Exercices 22

2 Fonction d'onde, équation de Schrödinger **23**
2.1 Terminologie : système, état, grandeur physique 24
2.2 Principes de la mécanique ondulatoire 25
2.2.1 L'expérience d'interférences 25
2.2.2 La fonction d'onde 25
2.2.3 L'équation de Schrödinger 27
2.3 Principe de superposition 27
2.4 Paquets d'ondes 29
2.4.1 Paquets d'ondes libres 29
2.4.2 Transformée de Fourier 29
2.4.3 Forme des paquets d'ondes 30

2.5 Repères historiques 31
2.6 Loi de probabilité de l'impulsion 32
2.6.1 Particule libre 32
2.6.2 Cas général, particule dans un potentiel 33
2.6.3 Conséquences physiques 33
2.6.4 Relations d'incertitude de Heisenberg 34
2.7 Complément mathématique : Transformation de Fourier 35
2.7.1 L'intégrale de Fourier 35
2.7.2 Inversion de la transformation de Fourier 36
2.7.3 Quelques propriétés 37
2.8 Exercices 41

3 Les grandeurs physiques 43
3.1 Le problème posé 43
3.1.1 Grandeurs physiques 44
3.1.2 Position et impulsion 44
3.2 Vitesse d'un paquet d'ondes 45
3.3 Les observables 46
3.3.1 Principe 46
3.3.2 Observables position et impulsion 47
3.3.3 Principe de correspondance 48
3.3.4 Commutation des observables 48
3.3.5 Repères historiques 49
3.4 Qu'apprend-on lors d'une mesure ? 49
3.4.1 L'expérience d'interférences 50
3.4.2 Premier contre-exemple d'Einstein 51
3.4.3 Que sait-on après une mesure ? 52
3.4.4 Etats propres et valeurs propres d'une observable 53
3.4.5 Réduction du paquet d'ondes 54
3.5 Le rôle particulier de l'énergie 54
3.5.1 L'hamiltonien 55
3.5.2 L'équation de Schrödinger ; temps et énergie 56
3.5.3 États stationnaires 56
3.5.4 Le mouvement : interférences d'états stationnaires 57
3.6 Le chat de Schrödinger 58
3.7 Exercices 63

4 Systèmes simples 65
4.1 Méthodologie 65
4.1.1 Etats liés et états de diffusion 65
4.1.2 Problèmes à une dimension 67

4.2 L'oscillateur harmonique 67
4.2.1 Le potentiel harmonique 67
4.2.2 Niveaux d'énergie, fonctions propres 68
4.3 Puits de potentiel carrés 69
4.3.1 Potentiels carrés 69
4.3.2 Puits de potentiel carré symétrique 70
4.3.3 Puits infini, particule dans une boîte 72
4.4 Franchissement de barrières de potentiel 73
4.4.1 Microscope à effet tunnel 77
4.4.2 Nanotechnologies 78
4.5 Illustrations et applications de l'effet tunnel 79
4.6 Exercices 80
4.7 **Problème : Effet Ramsauer** 82
4.7.1 Corrigé 82
4.8 **Problème : Centres colorés dans les cristaux ioniques.** 84
4.8.1 Cristal ionique 84
4.8.2 Loi de Molwo-Ivey 85
4.8.3 Effet Jahn-Teller 87
4.8.4 Déplacement de Stokes 88
4.8.5 Corrigé 89

5 Formalisme de Dirac **95**
5.1 L'espace de Hilbert 96
5.1.1 Espace de dimension 2 96
5.1.2 Fonctions de carré sommable 97
5.2 Formalisme de Dirac 99
5.2.1 Notations 99
5.2.2 Opérateurs 101
5.2.3 Règles de syntaxe 102
5.2.4 Projecteurs ; décomposition de l'identité 102
5.3 Résultats de mesure 103
5.3.1 Vecteurs propres et valeurs propres d'une observable 103
5.3.2 Résultats possibles de la mesure de la grandeur A 104
5.3.3 Probabilités 105
5.3.4 Le théorème spectral de Riesz 105
5.3.5 Signification physique des différentes représentations 107
5.4 Principes de la mécanique quantique 107
5.4.1 Les principes 107
5.5 Les Matrices de Heisenberg 109
5.5.1 Représentation matricielle des opérateurs 109
5.5.2 Matrices X et P 110

5.6 Polarisation de la lumière 113
5.7 Exercices 117

6 Double puits de potentiel, système à deux états 119
6.1 Double puits ; la molécule d'ammoniac 119
6.1.1 Le modèle 119
6.1.2 Calcul des états stationnaires, effet tunnel 120
6.1.3 Niveaux d'énergie 121
6.1.4 Fonctions d'ondes 123
6.1.5 Inversion de la molécule 123
6.1.6 Autres illustrations de l'effet tunnel 125
6.2 Système à « deux états » 127
6.2.1 Espace des états 130
6.2.2 Observables 130
6.2.3 Mécanique quantique matricielle 131
6.2.4 Exemples 132
6.2.5 Base des configurations classiques 133
6.2.6 Interférences, mesure 133
6.3 NH_3 dans un champ électrique 134
6.3.1 Champ fixe uniforme 135
6.3.2 Régimes de champ faible et de champ fort 136
6.4 Mouvement de la molécule dans un champ inhomogène 136
6.4.1 Force subie par la molécule dans un champ inhomogène 137
6.4.2 Inversion de population 139
6.5 Réaction à un champ oscillant, le maser 139
6.6 Exercices 147
6.7 **Problème : Oscillations des neutrinos** 149
6.7.1 Mécanisme des oscillations : neutrinos des réacteurs 151
6.7.2 Oscillations des trois espèces : neutrinos atmosphériques 153
6.7.3 Corrigé 156

7 Méthodes d'approximation 161
7.1 Méthode des perturbations 161
7.1.1 Le problème à résoudre 161
7.1.2 Développement des états et des énergies propres 162
7.1.3 Perturbations au premier ordre dans le cas non dégénéré 163
7.1.4 Perturbations au premier ordre dans le cas dégénéré 163
7.1.5 Etats propres à l'ordre 1 des perturbations 164
7.1.6 Perturbation des niveaux d'énergie au deuxième ordre 165
7.1.7 Exemples 165
7.1.8 Remarques sur la convergence de la théorie des perturbations . 166

7.2 La méthode variationnelle 167
7.2.1 Le niveau fondamental 167
7.2.2 Autres niveaux 168
7.2.3 Exemples d'application de la méthode variationnelle 169
7.3 Exercices 169
7.4 **Problème : Ions moléculaires colorés** 171
7.4.1 Couleur d'un ion linéaire dérivant d'un polyéthylène 171
7.4.2 Couleur d'un ion azoté 171
7.4.3 Corrigé 172

8 Algèbre des observables 175
8.1 Commutation des observables 175
8.1.1 Relation de commutation fondamentale 175
8.1.2 Autres relations de commutation 176
8.2 Relations d'incertitude 177
8.3 Évolution des grandeurs physiques 178
8.3.1 Évolution d'une valeur moyenne 178
8.3.2 Particule dans un potentiel, limite classique 178
8.3.3 Lois de conservation 179
8.4 Force de Lorentz en mécanique quantique 180
8.5 Résolution algébrique de l'oscillateur harmonique 182
8.5.1 Opérateurs $\hat{a}$, $\hat{a}^\dagger$ et $\hat{N}$ 182
8.5.2 Détermination des valeurs propres 183
8.5.3 États propres 184
8.6 Observables qui commutent 185
8.6.1 Théorème 185
8.6.2 Exemple 186
8.6.3 Ensemble complet d'observables qui commutent 186
8.6.4 État quantique complètement préparé 187
8.6.5 Exercices 189
8.7 **Problème : Molécules de Benzène et de C_8** 191
8.7.1 Solution 192
8.8 **Problème : Le problème à trois corps** 194
8.8.1 Rappels sur le problème à deux corps 194
8.8.2 Méthode variationnelle 194
8.8.3 Relation entre les problèmes à trois et à deux corps 195
8.8.4 Oscillateur harmonique à trois corps 195
8.8.5 Des mésons aux baryons dans le modèle des quarks 196
8.8.6 Corrigé 197
8.9 **Problème : Le chat de Schrödinger** 201
8.9.1 Les états quasi-classiques de l'oscillateur harmonique 201

8.9.2 Fabrication d'un état chat de Schrödinger . . . 202
8.9.3 Superposition quantique et mélange statistique . . . 203
8.9.4 Fragilité d'une superposition quantique . . . 204
8.9.5 Corrigé . . . 205

9 Le moment cinétique 211
9.1 Relation de commutation fondamentale . . . 211
9.1.1 Moment cinétique classique . . . 211
9.1.2 Définition d'une observable de moment cinétique . . . 212
9.1.3 Résultat de la quantification . . . 212
9.2 Démonstration de la quantification . . . 213
9.2.1 Le problème à résoudre . . . 213
9.2.2 Résolution analytique . . . 214
9.2.3 Vecteurs $|j, m>$ et valeurs propres j et m . . . 214
9.2.4 Opérateurs $\hat{J}_{\pm} = \hat{J}_x \pm i\hat{J}_y$ . . . 215
9.2.5 Quantification des moments cinétiques . . . 216
9.2.6 Construction des états $|j, m\rangle$ . . . 217
9.3 Valeurs et fonctions propres du moment cinétique orbital . . . 217
9.3.1 Formules en coordonnées sphériques . . . 217
9.3.2 m et ℓ sont entiers . . . 218
9.3.3 Fonctions propres communes à $\hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$ . . . 218
9.3.4 Exemples d'harmoniques sphériques . . . 219
9.3.5 Particule dans un état propre de moment cinétique . . . 219
9.4 Énergie de rotation d'une molécule diatomique . . . 220
9.4.1 Exemple : énergie de rotation d'une molécule diatomique . . . 220
9.5 Les Molécules interstellaires et l'Origine de la Vie . . . 222
9.5.1 Importance de la molécule CO . . . 222
9.5.2 Molécules Interstellaires . . . 223
9.5.3 L'origine de la vie . . . 224
9.6 Moment cinétique et moment magnétique . . . 225
9.6.1 Modèle classique . . . 226
9.6.2 Transposition quantique . . . 227
9.6.3 Conséquence expérimentale . . . 227
9.6.4 Précession de Larmor . . . 228
9.6.5 Que penser des valeur demi-entières de j et m ? . . . 229
9.7 Exercices . . . 229
9.8 **Problème : Excitons magnétiques** . . . 230
9.8.1 La molécule $Cs\,Fe\,Br_3$ . . . 231
9.8.2 Interactions spin-spin dans une chaîne de molécules . . . 231
9.8.3 Niveaux d'énergie de la chaîne . . . 232
9.8.4 Vibrations de la chaîne : Excitons . . . 233

9.8.5 Corrigé 235

10 Atome d'hydrogène **241**
10.1 Le Problème à deux corps 242
10.2 Mouvement dans un potentiel central 243
10.2.1 Coordonnées sphériques, ECOC 243
10.2.2 Fonctions propres communes à $\hat{H}$, $\hat{L}^2$ et $\hat{L}_z$ 244
10.2.3 Nombres quantiques 245
10.3 L'atome d'hydrogène 247
10.3.1 Unités de la physique atomique ; constante de structure fine . . 247
10.3.2 L'équation radiale sans dimension 249
10.3.3 Spectre de l'hydrogène 251
10.3.4 Les états stationnaires de l'atome d'hydrogène 252
10.3.5 Dimensions et ordres de grandeur 253
10.3.6 Repères historiques 254
10.4 Exercices 256
10.5 **Problème : Désintégration d'un atome de tritium** 258
10.5.1 Bilan énergétique de la désintégration du tritium. 258
10.5.2 Corrigé 259

11 Le spin 1/2 **261**
11.1 Résultats expérimentaux 261
11.2 Formalisme du spin 1/2 262
11.2.1 Représentation dans une base particulière 263
11.2.2 Représentation matricielle 263
11.3 Description complète d'une particule de spin 1/2 264
11.3.1 Représentation hybride. 264
11.3.2 Fonction d'onde à deux composantes. 264
11.3.3 Observables 265
11.4 Effets physiques de spin 265
11.5 L'expérience de Stern et Gerlach 267
11.5.1 Principe de l'expérience 267
11.5.2 Analyse semi-classique 267
11.5.3 Résultats expérimentaux 268
11.5.4 Explication de l'expérience de Stern et Gerlach 269
11.6 La découverte du spin 271
11.6.1 Les dessous de l'expérience de Stern et Gerlach 271
11.6.2 L'effet Zeeman anormal 272
11.6.3 La défi de Bohr à Pauli 273
11.6.4 L'hypothèse du spin 274
11.6.5 La structure fine des raies atomiques 274

11.7 Le magnétisme, résonance magnétique 275
11.7.1 Effets de spins, précession de Larmor 275
11.7.2 Superposition d'un champ fixe et d'un champ tournant 276
11.7.3 Expérience de Rabi 278
11.7.4 Résonance magnétique nucléaire 280
11.8 Divertissement : Rotation de 2π d'un spin 1/2 281
11.9 Exercices 282
11.10 **Problème : Piège de Penning.** 283
11.10.1 Corrigé 285
11.11 **Problème : Interférométrie de neutrons** 287
11.11.1 Interféromètre de neutrons 288
11.11.2 Effet gravitationnel 288
11.11.3 Rotation de $2n\pi$ d'un spin 1/2 290
11.11.4 Corrigé 291

12 Particules identiques, principe de Pauli **295**
12.1 L'indiscernabilité de deux particules identiques 296
12.1.1 Particules identiques en physique classique 296
12.1.2 Le problème quantique 297
12.1.3 Exemple d'ambiguïté 297
12.2 Systèmes de deux particules de spin 1/2 : spin total 298
12.2.1 L'espace de Hilbert du problème 298
12.2.2 Représentation matricielle 299
12.2.3 Etats de spin total 300
12.2.4 Propriétés de symétrie 301
12.3 Système de deux particules ; opérateur d'échange 301
12.3.1 L'espace de Hilbert pour un système de deux particules 301
12.3.2 L'opérateur d'échange entre deux particules identiques 302
12.3.3 Symétrie des états 303
12.4 Principe de Pauli 304
12.4.1 Cas de deux particules 304
12.4.2 Principe d'exclusion 305
12.4.3 Cas de N particules identiques 305
12.5 Conséquences physiques 307
12.5.1 Force d'échange entre deux fermions 307
12.5.2 Etat fondamental de N particules identiques indépendantes . . 307
12.5.3 Fermions et bosons indépendants à basse température 309
12.5.4 Relations d'incertitude pour un système de **N** fermions 311
12.6 Exercices 312
12.7 **Problème : Relations de Heisenberg pour les fermions.** 313
12.7.1 Relations d'incertitude pour **N** fermions 313

12.7.2 Naines blanches et la masse de Chandrasekhar 313
12.7.3 Étoiles à neutrons 315
12.7.4 Étoiles mini-bosoniques 317
12.7.5 Solution 318
12.8 **Problème : Découverte du principe de Pauli** 325
12.8.1 Données expérimentales 325
12.8.2 Théorie de l'atome d'hélium. 326
12.8.3 Confrontation expérience-théorie 329
12.8.4 Corrigé 330

13 L'intrication quantique, chemin des paradoxes 333
13.1 Le paradoxe EPR 334
13.2 La version de David Bohm 335
13.3 L'inégalité de Bell 338
13.4 Les tests expérimentaux 341
13.5 L'expérience GHZ 343
13.6 L'information quantique, ou comment tirer profit d'un embarras . . . 347
13.7 La téléportation quantique. 348
13.8 La cryptographie quantique 350
13.9 L'ordinateur quantique 355
13.10 Quelques remarques en guise de conclusion 359

14 Corrigés des exercices 361

Index 377

Avant propos

Dans cette réédition de *« Introduction à la physique quantique »* je dois ajouter quelques mots à l'avant-propos reproduit ci-dessous. Bien entendu, cette nouvelle version a été revue et développée. Elle a été complétée par les références à des travaux importants effectués pendant ces cinq années, sur les sujets traités.

J'ai ajouté deux compléments mathématiques, l'un sur les probabilités, l'autre sur la transformation de Fourier. Ces deux sujets faisaient défaut dans la première édition, ne serait-ce que pour fixer le vocabulaire et les formules importantes.

J'ai complété ou rajouté quelques problèmes, notamment le problème des oscillations de neutrinos, sujet couronné par le Prix Nobel 2015, et par un problème montrant comment le Principe de Pauli permet de passer du microscopique atomique aux objets macroscopiques. Cela permet notamment de comprendre divers stades d'évolution des étoiles : naines blanches, étoiles à neutrons et trous noirs.

Jean-Louis Basdevant
Paris, Mars 2017

Introduction de l'édition de 2012

Cet ouvrage est orienté dans le double but d'une part d'expliquer de façon aussi simple que possible les premiers concepts et outils de la physique quantique, de l'autre de fournir au lecteur les moyens de s'approprier ces connaissances grâce à une série d'exercices et de problèmes. Il y a une douzaine de têtes de chapitres, se terminant chacun par quelques exercices qui permettent de vérifier la bonne assimilation des points importants. Les corrigés de ces exercices sont donnés dans le dernier chapitre. En outre, j'ai inséré dix problèmes, plus avancés et complets, dont la solution suit l'énoncé. Ce sont de véritables cas concrets d'application de la physique quantique, portant sur des domaines d'actualité. Chacun de ces problèmes est proposé à la fin du chapitre qui, avec les précédents, permet de l'aborder.

La structure du texte est tout à fait classique. Après l'examen approfondi d'un phénomène quantique exemplaire, l'interférence d'atomes dans des fentes d'Young, nous exposons au chapitre 2, la description d'un système par une fonction d'onde. Le chapitre 3 porte sur les observables, le chapitre 4 sur l'étude des systèmes simples : potentiels carrés et oscillateur harmonique. Vient ensuite, au chapitre 5, l'étude du double puits de potentiel sur la cas de la molécule d'ammoniac et, naturellement, un

premier aperçu des systèmes à deux états. Cela mène naturellement à un problème sur les oscillations des neutrinos, une des grandes découvertes de notres époque.

Le chapitre 6 ouvre un nouveau champ avec le formalisme général de Dirac et l'espace de Hilbert. Il est suivi d'une série d'applications : au chapitre 7, les méthodes d'approximation, au chapitre 8 l'algèbre des observables, un problème sur la question des trois corps en mécanique quantique et un autre sur l'étude quantitative de la décohérence dans les états paradoxaux du type « chat de Schrödinger ».

Suivent, la quantification des moments cinétiques, avec un problème sur un système à très grand nombre de degrés de liberté : les excitons magnétiques, puis le chapitre 10 sur l'atome d'hydrogène. Le chapitre 11 est consacré au spin 1/2 et à ses effets ; il est appuyé par deux problèmes, dont les étonnantes expériences menées à Grenoble avec l'interférométrie de neutrons. Vient ensuite la question fascinante des particules identiques et du principe de Pauli, une des très grandes découvertes des années 1930. Ce chapitre est illustré par un problème sur la démarche intellectuelle de Pauli pour comprendre la spectroscopie de l'atome d'hélium. Le livre se termine par un dernier chapitre sur l'importance de l'intrication quantique, les inégalités de Bell, la cryptographie quantique, l'ordinateur quantique et le transport quantique. Ce chapitre est livré surtout à des fins de culture générale : il ouvre une porte sur un vaste pan de mécanique quantique approfondie.

Je remercie vivement Jean Dalibard, qui a pris ma succession à l'École polytechnique, pour tous les conseils, l'aide et l'inspiration qu'il m'a apportés depuis de nombreuses années. Nous avons publié un certain nombre de livres ensemble et le contenu de celui-ci en dérive par plusieurs aspects :

– *Mécanique quantique*, J-L. Basdevant et Jean Dalibard, Éditions de l'École polytechnique, 2007, ouvrage de fond auquel on peut se référer pour tout détail ;

– *Problèmes quantiques*, J-L. Basdevant et Jean Dalibard, Éditions de l'École polytechnique, 2004, dont sont extraits quelques uns des problèmes proposés ici.

Ces deux livres existent en version anglaise :

– *Quantum Mechanics*, J-L. Basdevant et Jean Dalibard, Springer-Verlag, 2002, réédité en 2005 ;

– *The Quantum Mechanics Solver*, J-L. Basdevant et Jean Dalibard, Springer-Verlag, 2000, refondu en 2005.

On trouvera des compléments mathématiques concernant le sujet dans :
Les mathématiques de la physique quantique, J-L. Basdevant, Vuibert, 2009.
Le texte lui-même découle principalement de :
Douze leçons de mécanique quantique, J-L. Basdevant, Vuibert, 2006,
qui ne comportait délibérément pas d'exercice ou problème d'application.

Jean-Louis Basdevant
Paris, Mai 2012

CHAPITRE 1

Un phénomène quantique

1.1 La mécanique quantique

Si l'on demande à un passant d'évoquer une formule physique célèbre, la réponse est en général $E = mc^2$. Pourtant, la formule $E = h\nu$ proposée la même année 1905 par le même Einstein, et qui a créé la mécanique quantique, nous touche de beaucoup plus près. Elle rime avec téléphone portable, calculatrices, ordinateurs personnels, internet, puces des cartes bleues, positionnement GPS, « Le Numérique » si cher aux politiciens actuels, et tant de technologies modernes.

De fait, des trois grandes dates de la physique du début du XX^e siècle, 1905 et la relativité restreinte d'Einstein, Lorentz et Poincaré, 1915, la relativité générale d'Einstein, extraordinaire réflexion sur la gravitation l'espace et le temps, et 1925, l'élaboration de la mécanique quantique, c'est certainement la dernière qui a le plus compté dans le développement des sciences et techniques.

Le premier prix Nobel de physique pour la relativité [1], date de 1993 avec Taylor et Hulse pour le pulsar double. Les prix Nobel pour la mécanique quantique ne se comptent presque plus (de l'ordre de 120) y compris celui d'Einstein pour le photon en 1921. Cela reflète des découvertes qui ont rapporté gros : 30% du produit national brut des États Unis provient des dérivés de la mécanique quantique !

La Mécanique quantique est incontournable. C'est la théorie fondamentale et complète des structures et processus physiques à l'échelle microscopique. Toute la physique est quantique, des particules élémentaires aux étoiles et au big bang en passant par les semi-conducteurs et les processus biologiques.

C'est certainement une des très grandes aventures intellectuelles de l'histoire de l'humanité. Probablement la plus grande de celles qui resteront du XX^e siècle, avant la psychanalyse, l'informatique ou le décodage du génome.

C'est une théorie qui existe, sa formulation est relativement simple. Et c'est surtout une théorie qui *marche* ! Pour un physicien, elle marche même trop bien ! On n'en voit pas les limites, sauf à dire que pendant 10^{-43} secondes juste après le big bang, on ne sait pas très bien ce qui la remplaçait. Mais après, c'est-à-dire maintenant, pour faire

1. Le seul avant celui de 2011 décerné à Saul Perlmutter, Brian Schmidt et Adam Riess, pour la découverte de l'expansion accélérée de l'Univers.

des dinosaures (des vrais, avec de l'ADN), des cors de chasse ou des ordinateurs, elle semble parfaite.

Cette théorie est subtile : on n'arrive à l'exprimer complètement qu'avec le langage mathématique, ce qui est très frustrant pour les philosophes. Vous allez voir, je l'espère, qu'ils ont tort car, au bout du compte, l'essentiel de ces mathématiques est très simple. Ou bien ils ont peur, ou bien ce sont des flemmards, ou bien encore ont-ils, par principe, un dédain pour les sciences, c'est une coquetterie en France.

Car ce qui est subtil c'est bien la physique, j'espère vous en convaincre, et non les mathématiques, qui sont une affaire de professionnels.

Même pour un physicien, la mécanique quantique a posé et pose toujours problème sur son interprétation et son contenu intellectuel. En fait, l'homme a fait là une superbe construction intellectuelle qui lui échappe un peu, qu'il ne comprend pas totalement ! Comme l'a dit Richard Feynman en 1965 : « Je pense pouvoir dire sans risque que personne ne comprend la mécanique quantique. » [2]

1.1.1 Planck, Einstein et le photon

Sa découverte aurait pu se faire en réfléchissant sur des quantités de faits à la fin du XIX^e siècle. Mais la notion de quanta fut proposée en 1900 par Max Planck.
Planck avait trouvé semi empiriquement une formule remarquable pour expliquer un problème qui fascinait les gens, le rayonnement du corps noir. La distribution en fréquence du rayonnement à l'intérieur d'un four ne dépend que de la température, pas de la nature ni de la forme du four. C'est une loi universelle, et Planck arrivait au bon résultat :

$$u(\nu) = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \tag{1.1}$$

où ν est la fréquence, T la température et k la constante de Boltzmann, en supposant que la lumière de fréquence ν ne pouvait échanger de l'énergie avec les parois que par quantités discrètes, multiples entiers d'un quantum d'énergie élémentaire $h\nu$

$$\Delta E = nh\nu \quad . \tag{1.2}$$

Et Planck comprit que la constante h qui porte son nom et apparaît dans (1.1)

$$h \approx 6,62\,10^{-34}\,\text{j.s}\,, \tag{1.3}$$

est une constante fondamentale de la nature, comme la vitesse de la lumière c en relativité et la constante G de la gravitation de Newton. Pour des raisons géométriques, nous utiliserons surtout la constante de Planck réduite

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} \approx 1,05\,10^{-34}\text{j.s} \quad . \tag{1.4}$$

La formule de Planck marche admirablement bien. La vérification requiert de se mettre à l'intérieur d'un four. Or, nous avons la chance de baigner précisément dans

2. « I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics », R. P. Feynman *The Character of Physical Law*, MIT Press, Cambridge, MA 1965.

le rayonnement fossile du big bang, qui s'est refroidi avec l'expansion de l'univers et dont la température est actuellement de 3°K. Son observation et sa mesure de plus en plus précise (fig. 1.1) est une des meilleures preuves tant de la formule de Planck que de la théorie du big bang.

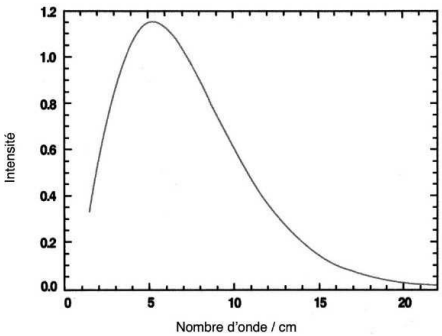

Figure 1.1. *Distribution en nombre d'onde du rayonnement fossile du big bang mesuré en 1992 par le satellite COBE. L'accord avec la formule de Planck à une température de $T = 2,728\ K$ est dans le trait. (Photo credit : Mather et al.* Astrophys. J. *420, 439 (1994))*

Les quanta de Planck étaient mystérieux, et c'est Einstein qui fait un pas décisif, en 1905, l'année où il fait la théorie du mouvement Brownien et celle de la Relativité restreinte. En se livrant à une analyse critique des travaux de Planck, il comprend que, par cohérence, pour des raisons d'équilibre, le caractère quantique, ou discret, doit être présent dans le champ électromagnétique lui-même. La lumière, que l'on sait être un phénomène ondulatoire depuis le début du XIX^e siècle, doit *aussi* présenter un comportement corpusculaire. De la lumière de fréquence ν est véhiculée par des particules, les *photons*[3], d'énergie

$$E = h\nu \tag{1.5}$$

et de quantité de mouvement $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$, où $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde $k = 2\pi/\lambda$, comme le montrera Compton en 1921.

Einstein pressentait là un élément essentiel de la théorie quantique, la « dualité » de la manifestation des propriétés de la lumière, qui apparaît *à la fois* comme ondulatoire et comme corpusculaire. Au passage, Einstein expliquait l'effet photoélectrique : première preuve expérimentale de ses idées. Ces propositions furent d'abord perçues comme révolutionnaires, voire invraisemblables, car elles semblaient remettre en cause les équations de Maxwell, triomphe de la physique du siècle précédent, synthèse entre l'électricité, le magnétisme et la lumière, qui avait mené directement aux ondes radio.

1.1.2 La spectroscopie atomique

L'explication de la spectroscopie atomique était reconnue comme un des grands problèmes de l'époque. Et la troisième percée, qui découle fortement des idées d'Einstein, vient en 1913 de Niels Bohr. Il y a trois éléments dans cette percée de Bohr.

- Il postule que la matière est également quantifiée et qu'il existe des *niveaux d'énergie discrets* pour les atomes, ce qui sera vérifié expérimentalement par Franck et Hertz en 1914.

3. Ce nom fut donné par Lewis en 1926

- Il postule que les raies spectrales accumulées au XIX^e siècle proviennent de transitions entre ces niveaux d'énergie. Les atomes absorbent ou émettent de l'énergie lumineuse en passant d'un niveau d'énergie (discret) à un autre, et la fréquence des raies spectrales est donnée par la différence

$$\nu_{nm} = \frac{|En - Em|}{h} \tag{1.6}$$

- Enfin, il construit un *modèle empirique d'atome d'hydrogène* qui marche admirablement bien, et donne la longueur d'onde des raies de cet atome au millième près :

$$E_n = -\frac{m{q_e}^4}{2(4\pi\varepsilon_0)^2\hbar^2 n^2} \quad ,$$

où n est un nombre entier positif.
Cette formule exprime la célèbre « constante de Rydberg » des spectroscopistes, qui multiplie le terme $1/n^2$, à partir des constantes fondamentales, ce qui émerveille les gens, notamment Einstein. [4]

1.1.3 E=hν

Le coup d'éclat d'Einstein, confirmé par plusieurs expériences fondamentales, transparaît dans trois formules semblables, $E = h\nu$. La première (1.2) est une hypothèse sur l'interaction du rayonnement et de la matière, la deuxième (1.5) concerne la lumière, la troisième (1.6) touche les atomes eux-mêmes.

Par la suite, la physique quantique s'est développée pendant vingt ans de façon effervescente, mais un peu débridée. Le succès de Bohr était impressionnant, mais on s'aperçut plus tard que l'atome d'hydrogène était un énorme coup de chance qui fit place à une obscure décennie préquantique, où les gens accumulèrent autant de dogmes que de recettes de cuisine, mêlant, sans les comprendre, des succès et des échecs.

1.2 Comportement ondulatoire des particules

La véritable formulation cohérente et complète date du milieu des années 1920, entre 1923 et 1927. Et nous nous plaçons d'emblée à ce moment-là . Elle est l'oeuvre d'une invraisemblable collectivité de génies : Louis de Broglie, Schrödinger, Heisenberg, Max Born, Dirac, Pauli, Hilbert, ... Jamais on n'a vu, dans la physique, un pareil effort collectif de gens talentueux pour construire des idées capables d'expliquer les phénomènes physiques.

Nous allons en découvrir un aspect essentiel sur une expérience concrète simple, le comportement ondulatoire des particules, qui est le symétrique du comportement corpusculaire de la lumière compris en 1905 par Einstein. Nous verrons que le comportement de la matière à l'échelle atomique n'est pas conforme au « bon sens » quotidien, et qu'il est impossible de l'expliquer par nos conceptions immédiates.

4. Le comportement en $1/n^2$ était connu depuis 1886 et la découverte empirique de Balmer.

Autrement dit, pour comprendre la mécanique quantique, il faut se débarrasser de tout ce qu'on sait et avoir l'esprit ouvert ; faire preuve d'esprit critique face aux *faits expérimentaux*.

1.2.1 Comportement ondulatoire de la matière

Ce qui déclenche la construction est une idée de Louis de Broglie en 1923. Louis de Broglie fait l'hypothèse hardie, mais géniale, qu'à toute particule de masse m et de vitesse v est « associée » une onde de longueur d'onde

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad , \tag{1.7}$$

$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ étant la quantité de mouvement de la particule, et p sa norme.

Les arguments de Louis de Broglie étaient multiples. Il avait notamment en tête que les niveaux d'énergie discrets de Bohr pouvaient provenir d'un phénomène d'ondes stationnaires. Cet aspect avait frappé les esprits des gens, notamment d'Einstein très enthousiaste.

Comment vérifier une telle hypothèse ? En observant des ondulations comme des ronds dans l'eau ? Non, c'est très difficile car ces longueurs d'onde sont très petites à cause de présence de la constante de planck h. Mais on sait faire des « amplificateurs » de longueurs d'ondes : ce sont tout simplement les phénomènes d'interférences.

Interférences

Rappelons les phénomènes d'interférences en physique ondulatoire, optique ou acoustique, sur le cas simple des franges d'Young.

On envoie un faisceau lumineux perpendiculaire à une plaque percée de deux fentes S_1 et S_2 distantes de a, et on observe la variation de l'intensité lumineuse $\mathrm{I}(x)$ sur un écran en fonction de la distance x au centre optique du système.

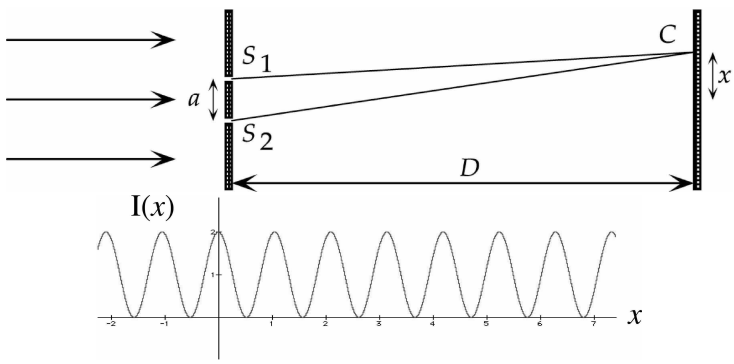

Figure 1.2. *Schéma d'une expérience d'interférences par des fentes ou trous d'Young.*

Les deux fentes agissent comme des sources secondaires d'ondes en phase et, en un point C, d'abscisse x, de l'écran, l'amplitude de l'onde est la somme algébrique des amplitudes des ondes provenant de chaque source.

Si ces deux ondes sont en phase l'amplitude est double. Si elles sont en opposition de phase, l'amplitude est nulle, il n'y a pas d'énergie lumineuse en ce point. Bien entendu, il y a tous les cas intermédiaires.

L'amplitude et l'intensité en C sont données en fonction des amplitudes émises par les deux sources S_1 et S_2 par

$$\text{Amplitude} \quad A_C = A_1 + A_2 \ , \qquad \text{Intensité} \quad I(x) = |A_C|^2 \quad . \tag{1.8}$$

Notons $A = \exp(-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}))$ l'amplitude de l'onde incidente en un point $\mathbf{r}$ à l'instant t. Ici, $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde, dont la norme k est reliée à la longueur d'onde par $k = 2\pi/\lambda$, et $\omega = 2\pi\nu$ sa pulsation (ν est la fréquence) :

$$A_{incident} = e^{-i(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \qquad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad . \tag{1.9}$$

Nous supposons que la distance D de l'écran aux fentes est très grande par rapport à leur écartement a. Dans ces conditions, les rayons S_1C et S_2C sont pratiquement parallèles. Nous supposons également que $D \gg x$ si bien que $|S_1C| = r_1 \simeq |S_2C| = r_2 \simeq D$.

L'amplitude A_C de l'onde au point C est la somme des amplitudes des deux ondes qui atteignent ce point.

$$A_C = A_1 + A_2 \propto e^{-i\omega t}\left(e^{ik\,r_1} + e^{ik\,r_2}\right) \tag{1.10}$$

Le théorème de la médiane, appliqué au triangle S_1S_2C donne

$$(CS_2)^2 - (CS_1)^2 = 2xa \qquad \text{soit} \quad r_2 - r_1 \simeq xa/D \quad ,$$

$$\text{ou encore} \qquad r_1 \simeq D - r_0 \ , \ r_2 \simeq D + r_0 \ , \ \text{avec} \quad r_0 = xa/2D \ .$$

On a donc

$$A_C \propto e^{-i(\omega t - kr)}\left(e^{-ik\,r_0} + e^{ik\,r_0}\right) = 2e^{-i(\omega t - kr)}\cos(kr_0) \tag{1.11}$$

L'amplitude de l'onde en un point est la somme des amplitudes des ondes qui atteignent ce point. Les amplitudes s'ajoutent, l'intensité I est le carré de la somme :

$$A_C = A_1 + A_2 \ , \qquad I(x) = |A_C|^2 \propto \cos^2(\lambda xa/D) \quad . \tag{1.12}$$

Elle présente une variation périodique avec un interfrange x_0 donné par :

$$x_0 = \lambda\frac{D}{a} \quad , \tag{1.13}$$

le facteur D/a « amplifie » la longueur d'onde λ dans ce dispositif.

1.2.2 Preuve expérimentale

En 1923, nous l'avons dit, Louis de Broglie fait l'hypothèse qu'à toute particule de masse m, de vitesse $\mathbf{v}$ et de quantité de mouvement $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, de norme p, est « associée » une onde de longueur d'onde

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad .$$

La première confirmation expérimentale de l'hypothèse ondulatoire de Louis de Broglie est due à Davisson et Germer en 1927. C'est une expérience de diffraction d'un faisceau d'électrons sur un cristal de Nickel, un peu compliquée à expliquer.

La réalisation des interférences à 2 sources, c'est à dire des interférences par des fentes d'Young, est plus difficile à réaliser avec des électrons. Mais des physiciens japonais [5], de la Nippon Electronics (NEC), ont réalisé assez récemment, en 1994, une superbe expérience d'interférences d'atomes froids dans des fentes d'Young. Les atomes, des atomes de Néon, sont initialement piégés dans des ondes stationnaires laser, et ils sont ensuite lâchés en chute libre au travers de deux fentes, de 2μm de large, distantes de 6μm. (L'échelle de la figure est déformée.) Qu'observe-t-on

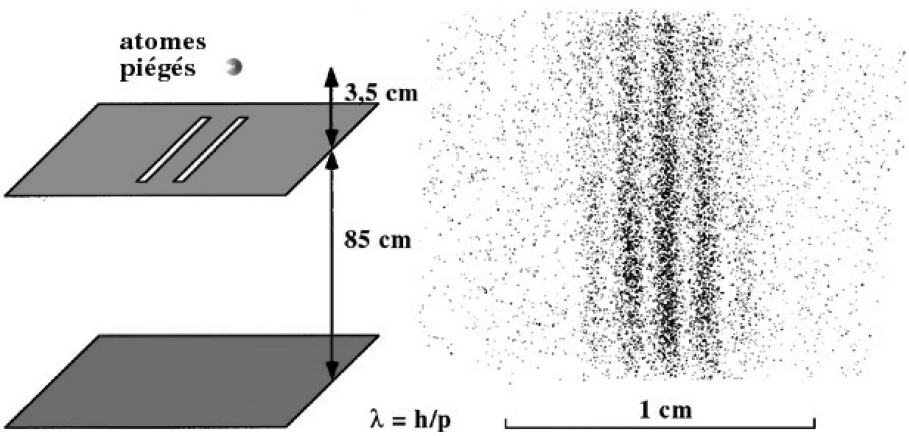

Figure 1.3. *Expérience de fentes d'Young réalisée avec des atomes de néon, préalablement refroidis par laser au milliKelvin (partie gauche). Chaque point de la figure (partie droite) correspond à l'impact d'un atome sur la plaque détectrice. Les franges d'interférences sont clairement visibles.*

sur la figure (1.3) ? La distribution des impacts des atomes à l'arrivée, est la même que l'intensité lumineuse dans le même dispositif, avec des franges d'interférences au même endroit, pourvu que soit satisfaite la relation de Louis de Broglie $\lambda = h/p$.

5. F. Shimizu, K. Shimizu, H. Takuma, Phys. Rev. A **46**, R17 (1992).

(Bien entendu, il faut, dans ce cas précis, tenir compte de ce que les atomes sont uniformément accélérés.)

Et le phénomène s'observe pour toute particule : des neutrons, des protons, des atomes d'Hélium, des molécules d'hydrogène, avec toujours la même relation entre la longueur d'onde et la vitesse. Le record actuel est de le faire avec de grosses molécules, des fullerènes : molécules sphériques de carbone C_{60} [6]. Par conséquent, les particules matérielles montrent bien un comportement ondulatoire, avec une longueur d'onde donnée par la formule de Louis de Broglie.

1.2.3 Analyse du phénomène

Maintenant, il faut se poser un certain nombre de questions.
- Qu'est-ce c'est que cette onde ?
- Et pourquoi ce résultat est-il si extraordinaire ?

Il est extraordinaire parce que les atomes sont notoirement des corpuscules. Un atome a une taille de l'ordre de l'Angström (dixième de nm) et il est ponctuel à ces échelles (μm, ou mm). La figure (1.3) est une confirmation formelle de cette affirmation. Un compteur mesure que chaque atome est arrivé à tel ou tel endroit avec autant de précision qu'on veut.

Quand on détecte un atome, il a une position parfaitement bien déterminée, il ne se casse pas en morceaux, il est *ponctuel*.

Or une onde emplit *tout l'espace*. Une onde, à la surface de l'eau, est l'ensemble des déformations de cette surface en tous les points de la surface.

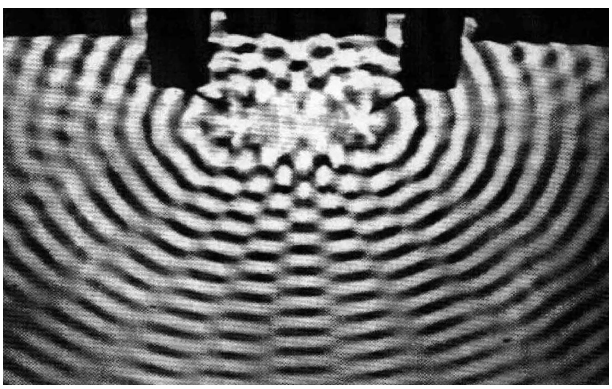

FIGURE 1.4. *Interférences à deux sources à la surface de l'eau, les lignes radiales sont des noeuds des interférences.*

Alors, qu'est-ce qu'une particule ? Est-ce quelque chose de ponctuel ou quelque chose de répandu dans tout l'espace ? La simple contemplation de la figure (1.4) nous montre que l'on est face à une contradiction conceptuelle complète.

Comment sortir de cette contradiction ? La réponse ne peut être qu'expérimentale. En réalité le phénomène est beaucoup plus riche qu'un simple phénomène ondulatoire,

6. O. Nairz, M. Arndt, A. Zeilinger, American Journal of Physics, Vol. 71, 319 (2003).

il faut regarder les faits expérimentaux et exercer notre esprit critique.

Puisque les atomes sont des corpuscules, envoyons-les un par un, et tous de la même façon. Il se pourrait parfaitement que ce phénomène soit un subtil effet collectif, résultant du très grand nombre d'atomes arrivant en même temps sur les deux fentes.

C'est une proposition décidable, c'est faisable expérimentalement. On peux parfaitement arranger le système de piège laser de façon que les atomes tombent l'un après l'autre : un seul atome tombe à chaque fois, qu'ils tombent tous de la même façon, et que l'on mesure le point d'impact de chacun.

Alors, faisons l'expérience !

1.3 Nature probabiliste du phénomène

1.3.1 Comportement aléatoire des particules

Qu'observe-t-on ? En fait, on le voit directement sur la figure (1.3).

- Chaque atome a un point d'impact bien défini : effectivement, l'atome ne se casse pas en morceaux.
- Mais le point d'impact est aléatoire. Il est complètement différent d'un atome à l'autre. Autrement dit, aux mêmes conditions initiales correspondent des impacts différents.

La figure (1.5) montre la construction de la figure d'interférences au fur et à mesure que s'accumulent les impacts d'atomes, c'est-à-dire le nombre total d'échantillons de la statistique.

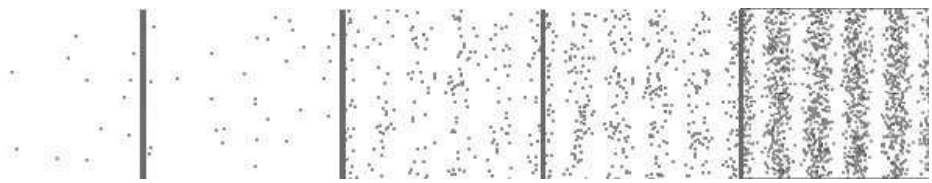

FIGURE 1.5. *Construction progressive, de gauche à droite, de la figure d'interférences au fur et à mesure que les impacts d'atomes s'accumulent (images successives d'un film).*

C'est-à-dire que les atomes, les corpuscules en général, ont un comportement *aléatoire*.

Chaque atome arrive à l'endroit où il veut, mais l'ensemble se distribue avec une loi de probabilité semblable à l'intensité lumineuse qu'on observe en optique ou en acoustique.

$$P(z) \propto I_{(optique)}(\lambda = h/p) \quad .$$

Il y a donc une différence importante avec la physique classique : à des conditions initiales identiques peuvent correspondre des conditions finales différentes.

Mais, me direz-vous, les phénomènes aléatoires existent en physique classique : on sait jouer aux dés, à pile ou face. Et bien, le gros problème c'est que ce n'est pas un phénomène aléatoire classique comme on en connaît en probabilités. Pourquoi ?

1.3.2 Un phénomène probabiliste non classique

Regardez. Si on bouche un des trous, les atomes passent par l'autre trou et ils se distribuent à l'arrivée d'une façon qui ne montre aucun signe d'interférences. Si on bouche l'autre, la distribution est à peu près ma même, décalée imperceptiblement (1μm/1mm). Alors, exerçons notre esprit critique.

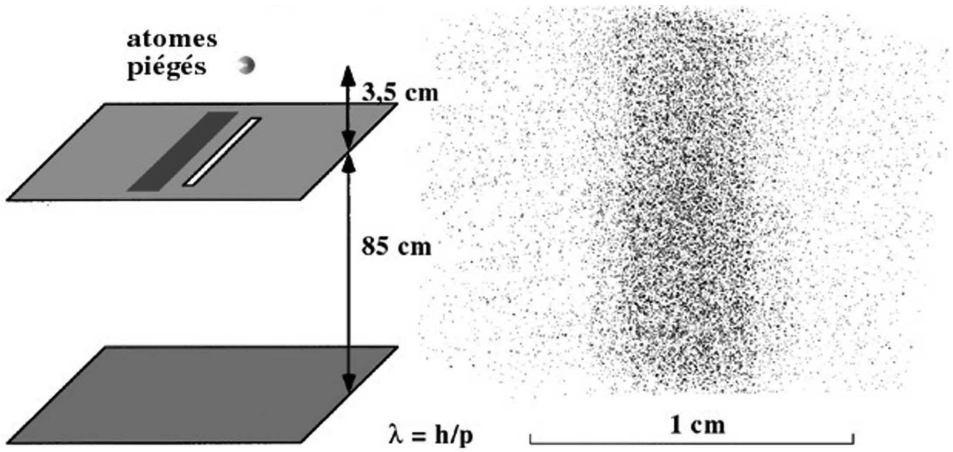

FIGURE 1.6. *Même expérience qu'en fig. (1.3) mais en ouvrant une seule fente. Les franges d'interférences disparaissent et laissent place à une figure de diffraction (cette image est un montage).*

1. On envoie les atomes un par un : ce sont des phénomènes indépendants, ils ne se gênent pas l'un l'autre, ils n'influent pas l'un sur l'autre.
2. Chaque atome est forcément passé par un trou.
3. On peut mesurer par quel trou chaque atome est passé. Il y a des techniques pour ça, éclairer les trous, mettre des compteurs, etc. on sait le faire.
4. Pour ceux qui sont passés par le premier trou, tout se passe comme si le deuxième était bouché, ils doivent donc se répartir à l'arrivée suivant une distribution qui ne montre pas d'interférences, et de même pour ceux qui sont passés par le deuxième trou.
5. Ayant fait cette mesure, on peut séparer les atomes en deux lots, ceux dont on sait qu'ils sont passés par le premier trou et ceux qui sont passés par le deuxième, et on connaît le point d'arrivée de chaque atome.

Nous avons deux lots indépendants, et nous pouvons les rassembler. Classiquement, le résultat obtenu en ouvrant les deux trous devrait être la somme, la superposition de ces deux distributions, semblable à celle de la figure (1.6). Si on lance deux dés, la probabilité que la somme soit 7 est la *somme* des probabilités que sortent (1,6), (2,5) ou (3,4). Il n'en est rien ici !

C'est même pire ! Ouvrir un second trou, c'est-à-dire ménager une possibilité supplémentaire d'atteindre l'écran, a *empêché* les atomes d'arriver à certains endroits. Et ça, c'est incroyable ! Pouvoir empêcher les gens d'entrer chez vous en ouvrant une deuxième porte !

La logique habituelle des probabilités ne s'applique pas. On ne peut pas expliquer le phénomène en termes classiques. C'est un phénomène probabiliste non-classique.

1.4 Conclusions

A ce point, nous sommes dans une impasse logique. Quelle est l'issue ? Le raisonnement, pour logique qu'il paraisse, mène à une conclusion fausse. Il y a donc des choses auxquelles on n'a pas pensé. Car la physique est cohérente. La réponse est expérimentale. Ce qui se passe est que :

1. Si l'on mesure par quel trou l'atome est passé, on peut faire la séparation et effectivement on observe comme distribution la somme des deux (figure 1.6). Donc on n'observe plus d'interférences, elles disparaissent.

   C'est une autre expérience !

2. Réciproquement, si l'on observe des interférences, il n'est pas possible de savoir par quel trou chaque atome est passé. On peut toujours en parler mais on ne peut rien en faire.

   Savoir par quel trou l'atome est passé dans une expérience d'interférences est une proposition qui n'a pas de sens physique, une proposition *indécidable* car non mesurable. Il est tout à fait correct de dire qu'il est passé par les deux trous à la fois, ce qui, classiquement, semble paradoxal, voire absurde.

Ce qui était faux était de supposer implicitement qu'à la fois on mesurait par quel trou les atomes étaient passés et qu'on observait les interférences. On le supposait sans l'avoir vérifié ! Et c'est un *principe fondateur* de la physique qu'une proposition n'a de sens que si elle peut être vérifiée expérimentalement.

On en tire deux conclusions.

• Tout d'abord, *une mesure perturbe le système*. Si l'on ne mesure pas par quel trou ils sont passés, les atomes sont capables d'interférer. Après cette mesure ils sont dans un autre « état d'esprit » où ils ne savent plus interférer. Ils ont été dérangés par la mesure. (De fait, on a changé de façon aléatoire la phase relative des ondes qui interfèrent dans (1.2), ce qui supprime tout phénomène cohérent d'interférences.)

• Deuxièmement, par voie de conséquence, *il n'y a pas de trajectoire* au sens classique. Observant l'atome dans une expérience d'interférences, on sait où et quand il a été émis, où et quand il a été observé, mais on ne peux pas dire par où il est passé à chaque instant intermédiaire. Observer des interférences et mesurer par quel trou chaque atome est passé sont deux expériences différentes incompatibles !

Or voilà deux idées qui allaient de soi ! L'idée qu'on peut faire une mesure aussi précise qu'on veut sans affecter le système qu'on observe est une vieille croyance de la

physique : on dit qu'il suffit de raffiner les instruments. La Physique quantique nous dit qu'il existe une limite inférieure absolue à la perturbation qu'apporte une mesure.

La notion de trajectoire, c'est-à-dire qu'il existe un ensemble de points par lesquels on peut affirmer et vérifier que la particule est passée à chaque instant, est aussi vieille que l'humanité. C'est ce que savait intuitivement l'homme des cavernes qui allait à la chasse. On avait passé des siècles à en faire la théorie : prévoir la trajectoire en fonction des conditions initiales. La Mécanique classique de Newton, c'est à dire la mécanique céleste, la balistique, repose entièrement sur la notion de trajectoire, et sa base même est mise en défaut par les phénomènes quantiques, notamment le phénomène quantique très simple que nous venons de voir.

Classiquement, on se représente le mouvement en pensant que l'on peut, à tout instant, mesurer la position d'un projectile, que la collection de ces données constitue la trajectoire, dont on peut tirer une prévision reproductible, indépendente du fait que l'on ait effectué des mesures ou non. On enseigne ces idées comme allant de soi et elles sont fausses ! Plus exactement : pour pénétrer dans le monde quantique il faut s'en débarrasser.

Bien entendu, il ne faut pas exagérer, ce sont de très bonnes approximations dans le monde classique. On ne peut pas exiger de jouer au tennis en chambre noire sous prétexte que l'adversaire, en regardant fixement la balle, peut la perturber et la faire sortir. C'est la constante de Planck $\hbar$ qui gouverne ces phénomènes ! Mais au tennis quantique, c'est vrai, il faut changer les règles. Changer les règles, c'est faire la théorie de tout çela.

1.5 Description phénoménologique

Ceci peut être omis en première lecture

Le phénomène d'interférences des atomes serait bien compliqué à expliquer si nous n'avions pas la chance que cela ressemble autant aux interférences usuelles, avec en plus une formule simple pour la longueur d'onde : $\lambda = h/p$. Essayons de nous inspirer de la physique ondulatoire. On doit pouvoir décrire, voire expliquer partiellement cette expérience de la façon suivante.

- Le comportement d'un atome (d'une particule) dans le faisceau d'atomes incidents de quantité de mouvement $p = mv$, correspond à celui d'une onde plane monochromatique :

$$\psi_{\text{incident}} = e^{-i(\omega t - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}/\hbar)} \qquad \mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar \qquad \lambda = 2\pi/k = h/p \tag{1.14}$$

  qui a le bon vecteur d'onde $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ et la bonne longueur d'onde.
- A la sortie des deux fentes, ce comportement est celui de la somme de deux ondes diffractées par chacune des fentes

$$\psi_{\text{sortant}}(x) = \psi_1(x) + \psi_2(x) \tag{1.15}$$

  qui décriraient respectivement le comportement de l'atome s'il passait par l'une des fentes, l'autre étant bouchée, et dont nous savons calculer le déphasage puisque nous connaissons la longueur d'onde.

- Et, finalement, la probabilité qu'un atome arrive en un certain point C du détecteur est le module carré de cette somme

$$P(C) = |(\psi_1(C) + \psi_2(C)|^2 \quad . \tag{1.16}$$

Nous suivons la même démarche qu'avec les interférences usuelles.

Dans ce cadre, nous obtenons donc la réponse à une question que l'on pouvait se poser ci-dessus : quelle est la signification physique de ces ondes ?

En physique ondulatoire, on manipule des amplitudes d'ondes, électromagnétiques ou acoustiques, qui s'ajoutent, et dont le module carré nous donne des intensités, des densités d'énergie, électrique ou acoustique.

Ces « ondes quantiques » sont alors des *amplitudes de probabilité*. Leur module carré nous donne une probabilité.

On ne travaille pas directement avec des probabilités, mais avec des intermédiaires, ces amplitudes de probabilité, qui elles s'ajoutent !

L'expérience d'interférences nous donne la longueur d'onde mais pas la pulsation ω de ces ondes. Louis de Broglie franchit le pas. Il pose, et c'est le bon choix, nous le verrons, que cette pulsation est reliée à l'énergie par la formule d'Einstein de la même façon que pour les photons

$$\omega = E/\hbar \quad \text{ou encore} \quad E = h\nu \quad , \tag{1.17}$$

où $E = p^2/2m$ est l'énergie cinétique de l'atome. Cela mène à la structure complète de ce qu'on appelle les *ondes de de Broglie* :

$$\psi_{\text{incident}} = e^{-\frac{i}{\hbar}(Et - \mathbf{p}\cdot\mathbf{r})} \quad \text{où} \quad E = p^2/2m \, , \tag{1.18}$$

qui est l'amplitude de probabilité de présence en un point $\mathbf{r}$ à l'instant t d'une particule de vitesse $\mathbf{v}$ et d'impulsion $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.

Puisque l'énergie cinétique E et l'impulsion sont reliées par $E = p^2/2m$, on peut tirer de cette expression une *équation d'onde*. En effet, en dérivant cette équation par rapport au temps, d'une part, et en prenant le Laplacien de cette expression de l'autre, on obtient que

$$\frac{\partial \psi_{\text{incident}}}{\partial t} = -\frac{iE}{\hbar}\psi_{\text{incident}} \, , \quad \text{et} \quad \Delta\psi_{\text{incident}} = -\frac{p^2}{\hbar^2}\psi_{\text{incident}}$$

c'est-à-dire, puisque $E = p^2/2m$, l'équation d'onde

$$i\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi \quad , \tag{1.19}$$

qui n'est autre que *l'équation de Schrödinger* pour une particule libre ![7]

Bien entendu, nous n'avons pas tout à fait terminé, ne serait-ce que parce que les atomes ont aussi un comportement corpusculaire, qu'on ne voit pas très bien dans tout cela. Mais on se rapproche.

7. Il est étonnant que Louis de Broglie n'ait pas pensé à écrire cette équation d'onde, ou son équivalent relativiste, car il travaillait avec la forme relativiste de l'énergie $E^2 = (p^2c^2 + m^2c^4)$.

1.6 Notions sur les probabilités

Notions fondamentales

Considérons un ensemble de phénomènes de même nature sur lesquels nous répétons une même observation ou mesure. Il peut s'agir par exemple de faire tourner une roue de loterie, de lancer un dé, de distribuer des cartes battues, de mesurer un paramètre économique, etc. Chaque observation appartient à un ensemble Ω de possibilités, qui peut être discret (numéro de la loterie, marque de la pièce ou du dé...), continu (ensemble des températures observables...), ou un ensemble d'objets mathématiques plus compliqués comme des fonctions (courbes d'intensités de bruit entre t_0 et t_1).

L'ensemble Ω est l'ensemble des *modalités* ou *issues* possibles de l'expérience. On parle aussi *d'événements* : « le numéro de sortie est pair », « la température observée est comprise entre T_0 et T_1 ». Chaque événement se trouve ainsi défini comme un ensemble de modalités (donc une partie de Ω) qui le réalisent.

Introduisons la notion expérimentale de fréquence. Supposons qu'on répète un nombre N de fois une expérience admettant un ensemble Ω d'issues possibles. Soit α un événement particulier et N_α le nombre d'expériences, parmi les N, où α se réalise. Le nombre observé N_α dépend évidemment de la série d'expériences effectuée. On appelle *fréquence empirique* de l'événement α dans la série d'expériences effectuées le rapport

$$f_\alpha(N) = N_\alpha/N \quad .$$

Une observation fondamentale est la suivante : lorsque N devient grand, les répétitions successives de l'expérience étant faites de façon « indépendante » (le résultat de l'une n'a *a priori* aucune influence sur les conditions dans laquelle les autres sont effectuées), les fréquences $f_\alpha(N)$ tendent, pour chaque événement α, vers une limite bien déterminée $P(\alpha)$, appelé *probabilité* de l'événement α, reliée à la fréquence empirique par la relation :

$$P(\alpha) = \lim_{N\to\infty} f_\alpha(N) \quad .$$

On a clairement $P(\alpha) \geq 0$, $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0$, et si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie d'événements disjoints :

$$P(\bigcup_{i\in I} A_i) = \sum_{i\in I} P(A_i) \quad .$$

En tant que théorie mathématique, le calcul des probabilités pose *a priori* l'existence des probabilités. On peut alors démontrer le théorème suivant :

La probabilité que la fréquence $f_\alpha(N)$ diffère de $P(\alpha)$ de plus de ϵ tend vers zéro lorsque N tend vers l'infini.

Ce type de convergence est appelé *stochastique* (conjectural).

Exemples de lois de probabilités

1- Lois discrètes

L'alternative simple.

Il s'agit d'un exemple où il n'y a que deux modalités, $\alpha = 1$ ou 2 (exemple : pile ou face). On appelle p la probabilité de la modalité 1 et q celle de la modalité 2. On a évidemment $p + q = 1$.

L'alternative généralisée.

Il y a n modalités $\alpha = 1, 2 \ldots n$. Par exemple, on peut mettre dans une urne m_1 boules marquées du signe 1, m_2 boules marquées 2, ... Si le tirage ne distingue pas les boules, la loi de probabilité est constituée par l'ensemble des nombres $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tels que

$$p_\alpha = \frac{m_\alpha}{\sum_{\beta=1}^{n} m_\beta} \qquad \text{avec} \qquad \sum_{\alpha=1}^{n} p_\alpha = 1 \ .$$

2- Lois de probabilités sur R ou R^n

Une loi de probabilité P sur l'espace des nombres réels R (resp. R^n) est dite de densité p, p étant une fonction intégrable positive telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = 1$ (resp. $\int_{R^n} p(x)\,d^n x = 1$), si pour tout intervalle (resp. tout pavé) I :

$$P(I) = \int_I p(x)\,dx \quad .$$

Il est commode de rassembler les cas discret et continu dans un même formalisme en travaillant avec la fonction de répartition $F(t) = P(]-\infty, t])$. Une loi de probabilité sur R est entièrement déterminée par les valeurs qu'elle prend sur les événements $]-\infty, t]$, t quelconque.

Exemples

1. Loi exponentielle :

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \quad (\lambda > 0) \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases} \ ,$$

ce qui donne :

$$F(t) = \int_{-\infty}^{t} p(x)dx = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 - e^{-\lambda t} & \text{si } t > 0 \end{cases} \ .$$

2. Loi de Gauss de paramètres μ, σ :

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \qquad \text{avec} \qquad \mu \in R, \sigma \in R^* \quad . \tag{1.20}$$

3- Variables aléatoires

Définition

Considérons l'exemple du jeu à n modalités $\alpha_1 \dots \alpha_n$ de probabilités respectives $p_1 \dots p_n$. Si dans ce jeu, je gagne une somme x_α lorsque l'issue qui se réalise est α, le nombre x_α qui est une fonction de l'issue (aléatoire) de l'expérience est appelé *variable aléatoire*.

Dans le cas ci-dessus, l'ensemble des $\{x_\alpha\}$ est discret. On appelle variable aléatoire discrète x un ensemble de nombres x_α (positifs, négatifs, complexes) associés chacun à une modalité d'un événement aléatoire discret. La donnée des couples $\{x_\alpha, p_\alpha\}$ définit la *loi de probabilité de la variable aléatoire* x.

De la même façon, on considérera des variables aléatoires *continues*. Soit x une variable aléatoire prenant ses valeurs dans un intervalle $[a, b]$. La densité de probabilité $p(x)$ (positive ou nulle) définit la loi de probabilité de cette variable aléatoire si la probabilité de trouver, dans un tirage, une valeur comprise entre x et $x+dx$ est $p(x)\,dx$. On a bien évidemment $\int_a^b p(x)dx = 1$. La généralisation dans R^n est immédiate.

4- Probabilités conditionnelles

Soit deux types d'événements $[A]$ et $[B]$. On est conduit à définir la *probabilité conditionnelle* de l'événement B sachant A, notée $P(B/A)$, par :

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} \quad \text{pourvu que } P(A) > 0.$$

Si X est une variable aléatoire discrète, on peut définir *la probabilité conditionnelle* $P(B|X = x)$ *de l'événement* B *quand* $X = x$, c'est-à-dire sachant l'événement $\{X = x\}$.

5- Indépendance de variables aléatoires

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans E_1 et E_2 respectivement. On dit que X et Y sont deux variables indépendantes si l'observation de X ne donne aucune information sur Y, et réciproquement. Autrement dit, la probabilité conditionnelle de trouver x si l'on sait y est indépendante de y (et réciproquement).

Cette condition s'exprime sous forme symétrique en x et y par :

$$P(\{X = x, Y = y\}) = P(\{X = x\})\ P(\{Y = y\})\ .$$

Les variables X *et* Y *sont indépendantes si et seulement si la loi du couple* (X, Y) *est le produit des lois de* X *et de* Y.

Cette condition s'étend facilement aux variables réelles quelconques. Si X et Y sont des variables réelles indépendantes de densités respectives p_1 et p_2, la loi du couple $\{X,Y\}$ est la loi de densité $p(x, y) = p_1(x)\ p_2(y)$.

6- La loi binomiale et son approximation gaussienne

Considérons une expérience aléatoire consistant à répéter N fois consécutives et de façon indépendante une expérience à deux issues (par exemple un jeu de pile ou face) la première issue notée 1 ayant la probabilité p de se réaliser, et la seconde notée 0 ayant la probabilité $q = 1 - p$ de se réaliser. Une telle suite d'épreuves est appelée *suite de Bernoulli*.

La probabilité d'une suite particulière $(x_1, \ldots, x_N)$ est, d'après l'hypothèse d'indépendance sur les expériences partielles successives, donnée par :

$$P(x_1, \ldots, x_n) = P[X_1 = x_1] \ldots P[X_N = x_N] = p^k \; q^{N-k} \; ,$$

où k désigne le nombre de 1 dans la suite $(x_1, \ldots, x_N)$. Considérons alors la variable aléatoire $X = X_1 + \ldots + X_N$ représentant le nombre de fois où 1 est apparu dans les N tirages successifs :

$$P[X = k] = \left(\begin{array}{c} N \\ k \end{array} \right) p^k q^{N-k} \equiv b(k; N, p) \; .$$

Cette loi $b(k; N, p)$ est appelée *loi binomiale* de paramètres N et p.

Approximation normale de la loi binomiale.

En utilisant la formule de Stirling $n \, ! \sim \sqrt{2\pi n} \, n^n \, e^{-n}$, on obtient pour $n \gg 1$:

$$b(k; n, p) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \; \exp - \frac{(k - np)^2}{2npq} \; ,$$

c'est-à-dire une loi gaussienne pour k, avec $\mu = np$ et $\sigma = \sqrt{npq}$.

7- Moments d'une distribution de probabilité

Valeur moyenne ou espérance mathématique

Soit une fonction $\varphi(x)$ de la variable aléatoire x ($\varphi(x)$ est une nouvelle variable aléatoire). On définit sa *valeur moyenne* $\langle \varphi \rangle$ par :

$$\langle \varphi \rangle = \left\{ \begin{array}{ll} \sum_\alpha \; \varphi(x_\alpha) \, p_\alpha & \text{cas discret} \\ \int_a^b \; \varphi(x) \, p(x) \, dx & \text{cas continu, avec} \quad x \in [a, b] \end{array} \right. \quad .$$

Nous noterons par $\langle x \rangle$ la valeur moyenne de la variable x elle-même :

$$\langle x \rangle = \int x \, p(x) \; dx \quad .$$

Cette quantité porte aussi le nom d'espérance mathématique : si je dois gagner la somme x_α lorsque le résultat du tirage est la modalité α, alors je peux espérer « en moyenne » gagner $\langle x \rangle$.

Moyenne des lois usuelles

1. Variable de l'alternative simple : $\langle X\rangle = p$.
2. Loi binomiale $b(k;n,p)$: $\langle k\rangle = np$.
3. Loi géométrique $P\{X=k\} = (1-p)p^k$ $(k \geq 0)$: $\langle X\rangle = p/(1-p)$.
4. Loi de Poisson $P\{X=k\} = e^{-\lambda}\,\lambda^k/k!$ avec $k \geq 0$: $\langle X\rangle = \lambda$.

Exemple.

Dans une désintégration exponentielle ($p(t) = \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$), la moyenne du temps que la particule passe avant de se désintégrer est $\langle t\rangle = \int_0^\infty \frac{t}{\tau}e^{-t/\tau}dt = \tau$.

8- Variance et écart quadratique moyen

Soit une variable aléatoire réelle x de valeur moyenne $\langle x\rangle = m$. *L'écart-type* ou *écart quadratique moyen* de x, noté σ ou Δx, est défini comme la racine carrée de la valeur moyenne de $(x-m)^2$:

$$(\Delta x)^2 = \sigma^2 = \langle (x - \langle x\rangle)^2\rangle \ ,$$

σ^2 est encore appelé *variance* de la loi de probabilité. On vérifie aisément en développant le carré que :

$$\sigma^2 = \langle x^2\rangle - 2\langle x\rangle\langle x\rangle + \langle x\rangle^2 = \langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2 \ .$$

Plus σ est petit, plus il est probable que l'on trouve une valeur de x proche de la moyenne. La quantité σ constitue donc une mesure de l'écart à la moyenne.

Variance des lois usuelles

1. Loi de l'alternative simple : $\sigma^2 = p(1-p)$.
2. Loi binomiale : $\sigma^2 = np(1-p)$. Noter que l'écart relatif $\sigma/\langle X\rangle$ tend vers zéro comme $n^{-1/2}$ quand $n \to \infty$.
3. Loi de Gauss : la variance coïncide avec le paramètre σ^2 de (1.20).
4. Loi géométrique : $\sigma^2 = p/(1-p)^2$.
5. Loi de Poisson de paramètre λ : $\sigma^2 = \lambda$.

9- Inégalité de Bienaymé-Tchebycheff

Notons m la valeur moyenne et σ^2 la variance de la variable réelle discrète X. On pourra alors démontrer :

$$P(\{|X-m| \geq \tau\sigma\}) \leq 1/\tau^2 \ , \tag{1.21}$$

qui prouve qu'à une variance petite, correspond une probabilité faible pour X de s'écarter beaucoup de sa moyenne.

Fonction erreur.

Pour le cas particulier de la loi gaussienne (m, σ), on appelle *fonction erreur* $\Phi(\tau)$ la quantité $P(\{|X - m| \leq \tau\sigma\})$. On a :

$$\Phi(\tau) = \int_{\tau\sigma}^{+\tau\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}\, dx \ .$$

Voici quelques valeurs prises par la fonction $\Phi(\tau)$:

τ	1	2	3
$\Phi(\tau)$	0,68	0,95	0,99

Exemple.

Procédons à 10^6 tirages de pile ou face ($n = 10^6,\ p = q = 1/2$). Le résultat sur la moyenne est évident : $m = 5\ 10^5$. Le résultat sur l'écart quadratique l'est moins : $\sigma = 500$. Si nous utilisons le théorème de Tchebycheff, nous voyons que la probabilité de trouver, en 10^6 tirages, le nombre k extérieur à l'intervalle (499 000, 501 000) est inférieure à 25 %. Cette probabilité est en fait de 5 % (évaluée à l'approximation gaussienne).

10- Vérification expérimentale d'une loi de probabilité

La mécanique quantique prévoit des lois de probabilités. Comment pourra-t-on alors effectuer la *vérification expérimentale*, à une précision donnée, d'une telle prévision ?

Considérons un exemple spécifique. On prédit que la loi de désintégration d'une particule élémentaire, ou d'un noyau radioactif, est de la forme $e^{-t/\tau}dt/\tau$. On va donc étudier la désintégration d'un grand nombre n de particules, et l'on va compter le nombre de désintégrations qui se produisent entre l'instant t et l'instant $t+\Delta t$. Chaque désintégration étant un événement indépendant, il s'agit donc de savoir combien de fois la modalité 1 (se désintégrer entre t et $t+\Delta t$) est réalisée. Sa probabilité théorique est :

$$p = \int_t^{t+\Delta t} e^{-t/\tau}dt/\tau = e^{-t/\tau}(1 - \exp(-\Delta t/\tau)) \ .$$

On choisira n assez grand et Δt pas trop petit devant τ pour que np soit grand. On est alors dans le cas où la loi binomiale se réduit à la loi de Gauss. La loi de probabilité pour le nombre de désintégrations k effectivement observées pendant le temps Δt est gaussienne avec la valeur moyenne np et l'écart quadratique $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. D'après les valeurs de la fonction erreur Φ, on s'attend à une probabilité de 95 % pour que k soit compris dans l'intervalle $np \pm 2\sqrt{np(1-p)}$, et de 99 % pour qu'il soit dans l'intervalle $np \pm 3\sqrt{np(1-p)}$, si la valeur de p prédite théoriquement est correcte.

Cela détermine l'ordre de grandeur de l'effort expérimental : la fréquence observée $f = k/n$ tend vers p avec une probabilité 1. Pour vérifier la loi de probabilité p à δp près avec une certitude de 95 % par exemple, il nous faut donc effectuer un nombre n d'observations tel que :

$$\delta p \geq 2\sqrt{p(1-p)/n} \quad \text{soit} \quad n \geq 4p(1-p)/(\delta p)^2 \ .$$

Inversement, si l'on n'a pas de prévision théorique pour p et que l'on cherche à déterminer cette quantité expérimentalement, ayant mesuré une fréquence expérimentale $f = k/n$, on pourra affirmer qu'avec une certitude $\Phi(\tau)$ on aura : $p = f \pm \tau\sqrt{f(1-f)/n}$. Notons que les « erreurs » qui apparaissent ainsi ont un caractère probabiliste. On les appelle erreurs *statistiques* par opposition à des erreurs dites *systématiques*, qui proviennent de ce que l'on mesure un phénomène légèrement différent de celui que l'on désire étudier (influence de l'opérateur, du milieu extérieur, ou de l'appareil de mesure sur le système à étudier).

Exercice : Le jeu est-il équitable ?

On vous propose le jeu suivant : *Misez un euro et lancez trois dés. Si le 6 (ou tout autre chiffre choisi) ne sort pas, vous perdrez votre mise ; vous recevrez 2 euros s'il sort une fois, 3 euros s'il sort deux fois, 6 euros s'il sort trois fois.* En calculant la valeur moyenne de votre gain (négatif si vous perdez), voyez s'il est raisonnable de jouer.

Réponse : la probabilité que le 6 ne sorte pas est $\left(\frac{5}{6}\right)^3$; pour qu'il sorte une fois, $3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^2 \times \left(\frac{1}{6}\right)$; deux fois, $3 \times \left(\frac{5}{6}\right) \times \left(\frac{1}{6}\right)^2$; trois fois, $\left(\frac{1}{6}\right)^3$. Les gains respectifs sont $-1, 1, 2, 5$, l'espérance de gain $\langle g \rangle$ est donc

$$\langle g \rangle = \frac{-5^3 + 3 \times 5^2 + 2 \times 3 \times 5 + 5}{6^3} = -\frac{15}{216} \quad . \tag{1.22}$$

Il vaut mieux ne pas jouer. Pour rendre le jeu honnête le troisième gain devrait être 20 euros !

1.7 Table de valeurs numériques

Angström	$1\ \text{Å} = 10^{-10}$ m ($\sim$ taille d'un atome)
Fermi	$1\ \text{fm} = 10^{-15}$ m ($\sim$ taille d'un noyau)
Electron-volt	$1\ \text{eV} = 1,60218\ 10^{-19}$ J

Constantes fondamentales :

Constante de Planck	$h = 6,6261\ 10^{-34}$ J s $\hbar = h/2\pi = 1,05457\ 10^{-34}$ J s $= 6,5821\ 10^{-22}$ MeV s
Vitesse de la lumière	$c = 299\,792\,458$ m s^{-1} $\hbar c = 197,327$ MeV fm $\simeq 1973$ eV Å
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H m^{-1}, $\quad \epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,38066\ 10^{-23}$ J K^{-1} $= 8,6174\ 10^{-5}$ eV K^{-1}
Nombre d'Avogadro	$N_A = 6,0221\ 10^{23}$
Charge de l'électron	$q_e = -q = -1,60218\ 10^{-19}$ C et $e^2 = q^2/(4\pi\epsilon_0)$
Masse de l'électron	$m_e = 9,1094\ 10^{-31}$ kg, $\quad m_e c^2 = 0,51100$ MeV
Masse du proton	$m_p = 1,67262\ 10^{-27}$ kg, $\quad m_p c^2 = 938,27$ MeV $m_p/m_e = 1836,15$
Masse du neutron	$m_n = 1,67493\ 10^{-27}$ kg, $\quad m_n c^2 = 939,57$ MeV

Constante de structure fine (sans dimension) $\quad \alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137,036$

Rayon classique de l'électron $\quad r_e = e^2/(m_e c^2) = 2,818\ 10^{-15}$ m

Longueur d'onde de Compton de l'électron $\quad \lambda_c = h/(m_e c) = 2,426\ 10^{-12}$ m

Rayon de Bohr $\quad a_1 = \hbar^2/(m_e e^2) = 0,52918\ 10^{-10}$ m

Energie d'ionisation de l'hydrogène $\quad E_I = m_e e^4/(2\hbar^2) = \alpha^2 m_e c^2/2 = 13,6057$ eV

Constante de Rydberg $\quad R_\infty = E_I/(hc) = 1,09737\ 10^7$ m^{-1}

Magnéton de Bohr $\mu_B = q_e\hbar/(2m_e) = -9,2740\ 10^{-24}$ J T^{-1}
$= -5,7884\ 10^{-5}$ eV T^{-1}

Magnéton nucléaire $\mu_N = q\hbar/(2m_p) = 5,0508\ 10^{-27}$ J T^{-1}
$= 3,1525\ 10^{-8}$ eV T^{-1}

Les valeurs mises à jour peuvent être consultées sur
`http://wulff.mit.edu/constants.html`

1.8 Exercices

1 Effet photoélectrique sur les métaux

On envoie sur une photocathode en potassium une radiation ultraviolette (raie du mercure) $\lambda = 253,7$ nm ; on constate que l'énergie maximale des photoélectrons éjectés est 3,14 eV. Si c'est une raie visible $\lambda = 589\,\text{nm}$ (raie jaune du sodium) ; l'énergie maximale est alors 0,36 eV .

1. Retrouver la valeur de la constante de Planck.
2. Calculer l'énergie d'extraction minimale des électrons du potassium.
3. Calculer la longueur d'onde maximale des radiations pouvant produire un effet photoélectrique sur le potassium.

2 Flux de photons

1. Une antenne de radio émet sur la fréquence de 1 MHz avec une puissance de 1 kW. Quel est le nombre de photons émis par seconde ?
2. Une étoile de première grandeur émet un flux lumineux sur la terre de $\sim 1,6\ 10^{-10}$ Watt/m^2 sur une longueur d'onde moyenne de 556 nm. Combien de photons traversent la pupille de l'oeil par seconde ?

3 Ordres de grandeur de longueurs d'onde de de Broglie

1. **Ordres de grandeur de longueurs d'onde de de Broglie.** Quelle est la longueur d'onde de de Broglie a) d'un électron de 100 eV, b) d'un neutron thermique ? Comparer avec les dimensions atomiques.
2. **Longueurs d'onde de de Broglie dans le domaine relativiste.** En physique des hautes énergies on a construit des accélérateurs d'électrons d'énergie de plus de 100 GeV. Quelle est la longueur d'onde de de Broglie de ces électrons ? Pourquoi de si hautes énergies sont-elles nécessaires ? On rappelle la relation relativiste entre énergie et impulsion $E = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$.

Introduction à la physique quantique

Rédigé à l'attention des étudiants en deuxième et troisième année de Licence de physique et en écoles d'ingénieurs, ce cours de physique quantique est complété par plus de 100 exercices et problèmes corrigés, dont certains, plus approfondis, portent sur des domaines d'actualité.

Ce manuel fournira à l'étudiant toutes les clés pour s'approprier et maîtriser les connaissances indispensables pour aborder, par la suite, les diverses disciplines de la physique quantique moderne, comme l'optique quantique, la physique des semi-conducteurs ou celle des particules élémentaires.

Sommaire

1. Un phénomène quantique
2. Fonction d'onde, équation de Schrödinger
3. Les grandeurs physiques
4. Systèmes simples
5. Double puits de potentiel, système à deux états
6. Formalisme de Dirac
7. Méthodes d'approximation
8. Algèbre des observables
9. Le moment cinétique
10. Atome d'hydrogène
11. Le spin ½
12. Particules identiques, principe de Pauli
13. L'intrication quantique, chemin des paradoxes
14. Corrigés des exercices

LES PLUS

- **Nombreuses références aux derniers développements du domaine**
- **Compléments mathématiques sur les probabilités et sur la transformation de Fourier**
- **Problèmes corrigés portant sur des sujets d'actualité**

Spécialiste de physique théorique des particules élémentaires, de mécanique quantique et d'astrophysique, directeur de recherche honoraire au CNRS, **Jean-Louis Basdevant** a été pendant trente-cinq ans professeur à l'École polytechnique, dont il a présidé le département de physique. Il est l'auteur de nombreux ouvrages de référence en physique comme en mathématiques.

Conception graphique : Primo&Primo®

ISBN : 978-2-8073-1442-9

9 782807 314429

deboeck SUPÉRIEUR

www.deboecksuperieur.com